

PS Algorithmen und Datenstrukturen 2026

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 19

Gegeben sei eine Hashtabelle der Größe m mit Verkettung zur Kollisionsverwaltung. Wenn n Elemente eingefügt wurden, ist die erwartete Listenlänge einer jeden Liste $\frac{n}{m}$. Dabei ist einfaches uniformes Hashing vorausgesetzt.

Zeigen Sie: Für eine beliebige Konstante $c > 0$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Liste $c \cdot \frac{n}{m}$ Elemente oder mehr enthalten sind, maximal $\frac{1}{c}$. Dabei wenden Sie die Markov-Ungleichung an und beweisen diese.

Aufgabe 20

Gegeben sei ein gerichteter Graph G in (a) Adjazenzlistendarstellung und (b) Matrixdarstellung. Bestimmen Sie für die folgenden Probleme enge Laufzeitkomplexitäten in Θ -Notation anhand der Parameter: (1) Knotenanzahl n , (2) Kantenanzahl m , (3) Ausgangsgrad eines Knotens $\deg^+(v)$, (4) maximaler Ausgangsgrad Δ^+ , (5) Eingangsgrad eines Knotens $\deg^-(v)$ und (6) maximaler Eingangsgrad Δ^- aus folgender Tabelle.

Wählen Sie für (a) und (b) jeweils die Laufzeitkomplexität und begründen Sie kurz.

Berechnung des Ausgangsgrads eines Knotens v	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+(v))$	$\Theta(\deg^-(v))$	$\Theta(n)$	$\Theta(m)$
Berechnung des Eingangsgrads eines Knotens v	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+(v))$	$\Theta(\deg^-(v))$	$\Theta(n)$	$\Theta(m)$
Prüfung der Existenz einer Kante zwischen zwei gegebenen Knoten u, v	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+(v))$	$\Theta(\deg^-(v))$	$\Theta(n)$	$\Theta(m)$
Prüfung der Existenz eines 2-Zykels startend in einem Knoten v	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+(v)\Delta^+)$	$\Theta(\deg^-(v)n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(nm)$

Ein 2-Zykel ist ein Kreis der Länge 2, der zwei Knoten u und v enthält mit der Eigenschaft $(u, v) \in E$ und $(v, u) \in E$.

Aufgabe 21

Zwei Knoten u und v in einem Graph nennt man *verbunden*, wenn es im Graph (1) einen Pfad von u nach v und (2) einen Pfad von v nach u gibt. In ungerichteten Graphen sind die Aussagen (1) und (2) äquivalent.

Entwickeln Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(|V| + |E|)$, der jedem Knoten v eines gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ein (ganzzahliges) Label $v.l$ zuweist, so dass $v.l = u.l$ für jedes Paar von Knoten u und v genau dann gilt wenn u und v verbunden sind.